

CHỦ ĐỀ 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

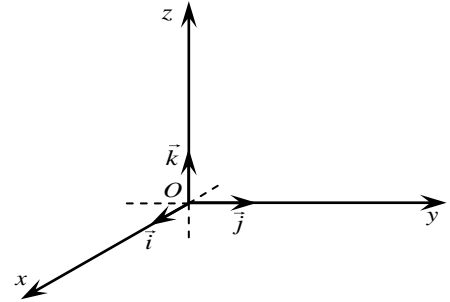
Tiết 1: Tọa độ điểm liên quan hệ trục Oxyz

A. LÝ THUYẾT

1. Hệ tọa độ trong không gian Oxyz

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.



2. Tọa độ của vectơ

a. Định nghĩa

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

b. Tính chất

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$

$$\bullet \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \bullet k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\bullet \vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

$$\bullet \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

$$\bullet \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \bullet |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

3. Tọa độ của điểm

a. Định nghĩa:

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (x: \text{hoành độ}, y: \text{tung độ}, z: \text{cao độ})$$

$$\text{Chú ý: } \bullet M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x; y; 0); M \in (Oyz) \Leftrightarrow M(0; y; z); M \in (Oxz) \Leftrightarrow M(x; 0; z)$$

$$\bullet M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0; 0); M \in Oy \Leftrightarrow M(0; y; 0); M \in Oz \Leftrightarrow M(0; 0; z).$$

b. Tính chất:

Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

$$\bullet \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\bullet \text{Toạ độ trung điểm } M \text{ của đoạn thẳng } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$\bullet \text{Toạ độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC: G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

• Toạ độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

c. Hình chiếu và điểm đối xứng của một điểm lên các trục tọa độ và mặt phẳng tọa độ

- Hình chiếu của $A(x_A; y_A; z_A)$ lên trục Ox là $A'(x_A; 0; 0)$
- Hình chiếu của $A(x_A; y_A; z_A)$ lên trục Oy là $A'(0; y_A; 0)$
- Hình chiếu của $A(x_A; y_A; z_A)$ lên trục Oz là $A'(0; 0; z_A)$
- Hình chiếu của $A(x_A; y_A; z_A)$ lên mp (Oxy) là $A'(x_A; y_A; 0)$
- Hình chiếu của $A(x_A; y_A; z_A)$ lên mp (Oyz) là $A'(0; y_A; z_A)$
- Hình chiếu của $A(x_A; y_A; z_A)$ lên mp (Oxz) là $A'(x_A; 0; z_A)$
- Điểm đối xứng của $A(x_A; y_A; z_A)$ qua trục Ox là $A'(x_A; -y_A; -z_A)$
- Điểm đối xứng của $A(x_A; y_A; z_A)$ qua trục Oy là $A'(-x_A; y_A; -z_A)$
- Điểm đối xứng của $A(x_A; y_A; z_A)$ qua trục Oz là $A'(-x_A; -y_A; z_A)$
- Điểm đối xứng của $A(x_A; y_A; z_A)$ qua mp (Oxy) là $A'(x_A; y_A; -z_A)$
- Điểm đối xứng của $A(x_A; y_A; z_A)$ qua mp (Oyz) là $A'(-x_A; y_A; z_A)$
- Điểm đối xứng của $A(x_A; y_A; z_A)$ qua mp (Oxz) là $A'(x_A; -y_A; z_A)$

NHẬN XÉT: *Tìm hình chiếu của điểm theo quy tắc: có mặt giữ nguyên, vắng mặt bằng 0. Tìm điểm đối xứng của một điểm theo quy tắc: có mặt giữ nguyên, vắng mặt đổi dấu.*

B. VÍ DỤ

- Câu 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là
- A.** $A(3; -2; 5)$. **B.** $A(-3; -17; 2)$. **C.** $A(3; 17; -2)$. **D.** $A(3; 5; -2)$.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (-3; 0; -1)$ và điểm $A(0; 2; 1)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là
- A.** $M(-5; 1; 2)$. **B.** $M(3; -2; 1)$. **C.** $M(1; 4; -2)$. **D.** $M(5; 4; -2)$.
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; -3; -5)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
- A.** $(1; -3; 5)$. **B.** $(1; -3; 0)$. **C.** $(1; -3; 1)$. **D.** $(1; -3; 2)$.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 2; -1)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với A qua trục Oy là
- A.** $A'(-3; 2; 1)$. **B.** $A'(3; 2; -1)$. **C.** $A'(3; 2; 1)$. **D.** $A'(3; -2; -1)$.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $G(4; -1; -1)$. **B.** $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **C.** $G\left(2; \frac{-1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **D.** $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là

A. $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 0\right)$. **C.** $\left(0; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là

A. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. **B.** $I(1;1;0)$. **C.** $I(1;-1;2)$. **D.** $I(1;1;1)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;4;2)$, $B(-5;6;2)$, $C(-4;7;-1)$. Tìm tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

A. $D(-10;17;-7)$. **B.** $D(10;17;-7)$. **C.** $D(10;-17;7)$. **D.** $D(-10;-17;7)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho sáu điểm $A(1;2;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(3;3;-3)$, A', B', C' thỏa mãn $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$. Nếu G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là

A. $\left(2; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(2; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(2; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(3;1;-1)$. Điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A, B, C có tọa độ là

A. $\left(0; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{6}; 0; -\frac{5}{6}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$. **D.** $\left(\frac{6}{5}; 0; -\frac{6}{7}\right)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là AB, AD, AA' , biết $A \equiv O, B(2;0;0), D(0;3;0), A'(0;0;4)$. Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tứ diện $CB'C'D'$. Khi đó: $a+b+c=?$

A. 10. **B.** 5. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có đỉnh $C(-2;2;2)$ và trọng tâm $G(-1;1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B của tam giác ABC , biết A thuộc mặt phẳng (Oxy) và điểm B thuộc trục cao.

A. $A(-1;-1;0), B(0;0;4)$. **B.** $A(-1;1;0), B(0;0;4)$.
C. $A(-1;0;1), B(0;0;4)$ **D.** $A(-4;4;0), B(0;0;1)$.

- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là
- A.** $B'(10;8;6)$. **B.** $B'(1;-2;0)$. **C.** $B'(13;0;17)$. **D.** $B'(8;4;10)$.
- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2)$, $B(3;5;-10)$. Trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz) . Tọa độ đỉnh C là:
- A.** $C(4;-5;-2)$. **B.** $C(4;5;2)$. **C.** $C(4;-5;2)$. **D.** $C(4;5;-2)$.
- Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;5)$ và $B(3;-2;4)$. Điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm A, B có tọa độ là
- A.** $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{2};0;0\right)$. **C.** $M(3;0;0)$. **D.** $M(-3;0;0)$.
- Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;-4;0)$, $B(-5;6;0)$, $C(3;2;0)$. Tọa độ chân đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC là
- A.** $(15;-14;0)$. **B.** $(15;-4;0)$. **C.** $(-15;4;0)$. **D.** $(-15;-14;0)$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;7)$, $B(4;5;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M . Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào
- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 2 . **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.
- Câu 18:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;3)$ và $B(3;-1;2)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $MA \cdot \overline{MA} = 4MB \cdot \overline{MB}$, khi đó ta có $x+y+z=?$
- A.** 4 . **B.** 3 . **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{8}{3}$.
- Câu 19:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-4)$, $B(-3;5;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A.** $M(-1;3;2)$. **B.** $M(-2;4;0)$. **C.** $M(-3;7;-2)$. **D.** $M\left(-\frac{3}{7};\frac{7}{2};-1\right)$.
- Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$; $B(0;1;-1)$. Hai điểm D, E thay đổi trên các đoạn OA, OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm I của DE có tọa độ là
- A.** $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$. **B.** $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3};0\right)$. **C.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};0\right)$.